JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **20**, 333–347 (1977)

Optimale Hermite-Interpolation differenzierbarer periodischer Funktionen

WILHELM FORST

Fachbereich Mathematik der Universität, D-74 Tübingen, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received January 7, 1976

For the Favard class F_r in the space $C_{2\pi}$ of continuous 2π-periodic functions we solve the following problem. Given $x \in \mathbb{R}$ and knots $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_0 + 2\pi$ we determine weights α_{kj} $(0 \leqslant k < n, 0 \leqslant j < r)$ such that

$$\sup_{f \in F_r} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{kj} f^{(j)}(x_k) \right|$$

is minimal. The optimal weights are unique (except for a trivial case) and we obtain them from a system of periodic polynomial splines u_{kj} $(0 \leqslant k < n, 0 \leqslant j < r)$: $\alpha_{kj} = u_{kj}(x)$. These splines induce an interpolation operator whose degree of approximation with respect to the class F_r is minimal if the knots are equidistant. Finally, we describe an efficient numerical procedure which shows how to compute the interpolation spline in the equidistant case.

1. EINLEITUNG

Es sei $C_{2\pi}$ der Raum der stetigen 2π-periodischen Funktionen, normiert mittels der Maximumnorm, und F_r $(r \in \mathbb{N}_1)$ die $r$te Favardklasse bestehend aus den $(r-1)$-mal absolut stetig differenzierbaren Funktionen von $C_{2\pi}$ mit $\|f^{(r)}\|_\infty \leqslant 1$. In dieser Arbeit knüpfen wir an Untersuchungen von Lushpai [3] an und behandeln analog zum Vorgehen von Sard [4] folgendes Problem: Zu vorgegebenem m, $0 \leqslant m < r$, $x \in \mathbb{R}$ und Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_0 + 2\pi$ approximiere man das Auswertungsfunktional $\hat{x}$ durch Linearkombinationen der Punktfunktionale $\hat{x}_k D^j$ $(k = 0,..., n-1;$ $j = 0,..., m)$, d.h. wir suchen nach Gewichten α_{kj} $(k = 0,..., n-1;$ $j = 0,..., m)$ derart, daß

$$\left\| \hat{x} - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} \hat{x}_k D^j \right\|_r := \sup_{f \in F_r} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} f^{(j)}(x_k) \right|$$

minimal wird. Den Fall $m = r - 1$ können wir explizit lösen; dabei beantworten wir auch die Frage nach der optimalen Wahl der Stützstellen.

ISSN 0021-9045

Schließlich erhalten wir ein Funktionensystem u_{kj} ($k = 0,\dots, n-1$; $j = 0,\dots, r-1$) von periodischen Splines, welches insofern optimal ist, als die Gewichte $\alpha_{kj} := u_{kj}(x)$ ($k = 0,\dots, n-1$; $j = 0,\dots, r-1$) ein Proximum

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{kj} \hat{x}_k D^j$$

zu $\hat{x}$ ergeben. Weiter zeigen wir, daß bis auf einen trivialen Ausnahmefall für $x \in \mathbb{R}$ die optimalen Gewichte α_{kj} eindeutig bestimmt sind, und ermitteln den Approximationsgrad $\sup_{f\in F_r} \|f - L_{r,n} f\|$ des durch

$$L_{r,n} f := \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} f^{(j)}(x_k)\, u_{kj}$$

definierten Interpolationsoperators $L_{r,n}$. Ein Vergleich mit den durch Tihomirov [7, 8] berechneten Breiten der Favardklasse zeigt, daß wir so zu einem Approximationsprozeß mit guten Approximationseigenschaften gelangen. Im letzten Abschnitt der Arbeit wird überdies dargelegt, wie mit Hilfe des Algorithmus von Cooley und Tukey der Interpolationsspline numerisch effizient bestimmt werden kann.

2. Berechnung der Norm des Fehlerfunktionals

Im folgenden betrachten wir den linearen Raum

$$K_r := \left\{ f \in C_{2\pi}^{r-1} \,\middle|\, \bigvee_{c\in\mathbb{R}} \bigwedge_{t>0} \omega(f^{(r-1)}, t) \le ct \right\} \qquad (r \in \mathbb{N}_1).$$

Für $f \in K_r$ ist $f^{(r-1)}$ absolut stetig; somit existiert fast überall $f^{(r)}(x)$, und $f^{(r)}$ gehört zu $L_{2\pi}^{\infty}$. Legen wir für $f \in K_r$

$$\|f\|_r := \|f^{(r)}\|_\infty \tag{1}$$

als (Halb-) Norm zugrunde, so ist F_r die Einheitskugel von K_r. Sei $0 \le m < r$. Zu Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_0 + 2\pi$ und Gewichten $a = (\alpha_{kj} \mid k = 0,\dots, n-1;\ j = 0,\dots, m) \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)}$ betrachten wir für festes $x \in \mathbb{R}$ die daraus hervorgehenden Restglieder

$$R_a(f) := f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} f^{(j)}(x_k). \tag{2}$$

Wir fragen nach optimalen Gewichten a, für die R_a als Funktional auf K_r minimale Norm $\|R_a\|_r = \sup_{f\in F_r} |R_a(f)|$ hat. Für $f \in K_r$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_r(t - x) f^{(r)}(t)\, dt. \tag{3}$$

wobei zwischen h_r und der periodischen Fortsetzung $\bar{B}_r$ des $r$ten Bernoulli-polynoms B_r die Beziehung

$$h_r(t) = (-1)^{r+1} \frac{(2\pi)^r}{r!} \bar{B}_r\left(\frac{t}{2\pi}\right) \tag{4}$$

besteht. Aus (3) ergibt sich für das Fehlerfunktional R_a die Darstellung

$$\begin{aligned} R_a(f) &= \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k0}\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(h_r(t-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} h_{r-j}(t-x_k)\right) f^{(r)}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{5}$$

SATZ 1. *Die in* (2) *definierten* R_a *sind als Funktionale über* K_r *genau dann beschränkt, wenn*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k0} = 1 \tag{6}$$

gilt. R_a *hat dann die Norm*

$$\| R_a \|_r = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| h_r(t-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} h_{r-j}(t-x_k) - \alpha \right| dt. \tag{7}$$

Ist R_a beschränkt, so umfaßt der Kern von R_a den Nullraum der Halbnorm. Dieser ist gleich der Menge P_0 der konstanten Funktionen, und damit folgt (6). Umgekehrt ergibt sich aus (6) und (5) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\| R_a \|_r \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| h_r(t-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} h_{r-j}(t-x_k) - \alpha \right| dt.$$

Zum Beweis von

$$\| R_a \|_r \geqslant \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| h_r(t-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} h_{r-j}(t-x_k) - \alpha \right| dt$$

nehmen wir an, daß das Minimum für $\bar{\alpha}$ angenommen wird. Nach [5, Satz 1.4] existiert dann eine Funktion $\sigma \in L_{2\pi}^{\infty}$, $\| \sigma \|_\infty = 1$, so daß für die Fehlerfunktion

$$\epsilon(t) := h_r(t-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} h_{r-j}(t-x_k) - \bar{\alpha}$$

die Beziehungen

$$| \epsilon(t) | = \epsilon(t)\, \sigma(t) \qquad \text{für fast alle } t \in \mathbb{R}$$

und

$$(1/2\pi)\int_0^{2\pi} \sigma(t)\,dt = 0 \tag{8}$$

gelten. Mit σ bilden wir die Funktion

$$f_0(z) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} h_r(t-z)\,\sigma(t)\,dt.$$

Es gilt $f_0 \in K_r$ und wegen (8) $f_0^{(r)}(t) = \sigma(t)$ für fast alle t; somit ist $\|f_0\|_r = 1$ und

$$R_a|_r = R_a(f_0) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} |\epsilon(t)|\,dt.$$

Satz 1 führt auf das Problem, den Ausdruck

$$(1/2\pi)\int_0^{2\pi} \left| h_r(t-x) - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} h_{r-j}(t-x_k) - \alpha \right| dt$$

bezüglich der α_{kj} und α unter der Nebenbedingung (6) zu minimieren. Aus [5, Satz 1.4] folgt dann die Existenz von $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in L_{2\pi}^{\infty}$ mit $\|\sigma\|_\infty = 1$ und

$$\sigma(t)\left(h_r(t-x) - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} h_{r-j}(t-x_k) - \alpha\right)$$

$$= \left| h_r(t-x) - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj} h_{r-j}(t-x_k) - \alpha \right| \qquad \text{für fast alle } t,$$

so daß die Beziehungen

$$\begin{aligned} &(1/2\pi)\int_0^{2\pi} \sigma(t)\, h_r(t-x_k)\,dt = \lambda \qquad (k = 0,\dots, n-1),\\ &(1/2\pi)\int_0^{2\pi} \sigma(t)\, h_{r-j}(t-x_k)\,dt = 0 \qquad (k = 0,\dots, n-1;\ j = 1,\dots, m) \end{aligned} \tag{9}$$

und

$$(1/2\pi)\int_0^{2\pi} \sigma(t)\,dt = 0 \tag{10}$$

erfüllt sind.

Im folgenden untersuchen wir jetzt speziell den Fall $m = r - 1$ und setzen o.B.d.A. $x_0 = 0$ voraus. Für optimale Gewichte α_{kj} und α gilt dann

LEMMA 1. *Die Einschränkung der Funktion* $\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{kj} T_{-x_k} h_{r-j} + \alpha$ *auf das Intervall* (x_l, x_{l+1}), $0 \le l < n$, *ist ein* L^1*-Proximum zu der ge-*

shifteten Funktion $T_{-x}h_r$, $(T_{-x}h_r)(t) := h_r(t-x)$, *unter den algebraischen Polynomen aus* P_r *mit Höchstkoeffizient* $(-1)^{r+1}/r!$.

Sei

$$H_r(t) := (-1)^{r-1}\frac{(2\pi)^r}{r!}B_r\left(\frac{t}{2\pi}\right);$$

dann hat H_r den Höchstkoeffizienten $(-1)^{r+1}/r!$, und es gilt

$$H_r(t+2\pi) - H_r(t) = (-1)^{r-1}\frac{2\pi}{(r-1)!}t^{r-1}. \tag{11}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sigma(t)\,h_{r-j}(t-x_k)\,dt &= \int_0^{x_k}\sigma(t)\,H_{r-j}(t-x_k+2\pi)\,dt\\ &\quad+\int_{x_k}^{2\pi}\sigma(t)\,H_{r-j}(t-x_k)\,dt\\ &= \int_0^{x_k}\sigma(t)(H_{r-j}(t-x_k+2\pi)-H_{r-j}(t-x_k))\\ &\quad+\int_0^{2\pi}\sigma(t)\,H_{r-j}(t-x_k)\,dt\end{aligned}$$

folgt aus (9) und (11)

$$\begin{gathered}\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\int_0^{x_k}\sigma(t)(t-x_k)^{r-1}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma(t)\,H_r(t-x_k)\,dt=\lambda\\ (k=0,\dots,n),\\ \frac{(-1)^{r-j-1}}{(r-j-1)!}\int_0^{x_k}\sigma(t)(t-x_k)^{r-j-1}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma(t)\,H_{r-j}(t-x_k)\,dt=0\\ (k=0,\dots,n;\ j=1,\dots,r-1).\end{gathered} \tag{12}$$

Speziell für $k=0$ gilt also

$$\begin{aligned}&(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\sigma(t)\,H_r(t)\,dt=\lambda,\\ &(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\sigma(t)\,H_{r-j}(t)\,dt=0\qquad(j=1,\dots,r-1).\end{aligned} \tag{13}$$

woraus man unter Verwendung von (10) rückwärts rechnend

$$
\begin{aligned}
(1/2\pi) \int_0^{2\pi} \sigma(t)\, t^j \, dt &= 0 \qquad (j = 0, \ldots, r-1), \\
\frac{(-1)^{r+1}}{r!} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(t)\, t^r \, dt &= \lambda
\end{aligned}
\tag{14}
$$

erhält. Mit (14) ergibt sich so aus (13)

$$
\begin{aligned}
(1/2\pi) \int_0^{2\pi} \sigma(t)\, H_r(t - x_k)\, dt &= \lambda \qquad (k = 0, \ldots, n), \\
(1/2\pi) \int_0^{2\pi} \sigma(t)\, H_{r-j}(t - x_k)\, dt &= 0 \qquad (k = 0, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r-1).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Dies eingesetzt in (12) liefert schließlich

$$
\int_0^{x_k} \sigma(t)(t - x_k)^j \, dt = 0 \qquad (k = 0, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, r-1)
$$

bzw.

$$
\int_0^{x_k} \sigma(t)\, t^j \, dt = 0 \qquad (k = 0, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, r-1).
$$

Für das Intervall (x_l, x_{l+1}), $0 \leqslant l < n$, gilt also

$$
\int_{x_l}^{x_{l+1}} \sigma(t)\, t^j \, dt = 0 \qquad (j = 0, \ldots, r-1). \tag{16}
$$

Damit ist Lemma 1 bewiesen, und als nächstes stellt sich so das Problem, in $P_{r-1}(x_l, x_{l+1})$ ein (bzw. das) L^1-Proximum zu $T_{-x}(h_r - H_r)$ zu suchen.

3. Das polynomische L^1-Proximum zu geshifteten Bernoullipolynomen

Sei $0 < b - a \leqslant 1$, $x \in [a, b]$; im folgenden suchen wir ein Proximum zu $T_{-x}(\bar{B}_r - B_r) \in L^1(a, b)$ in $P_{r-1}(a, b)$. Die Untersuchung des Falles $r = 1$ führen wir als erstes gesondert durch. Wegen

$$
\bar{B}_1(t - x) - B_1(t - x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leqslant t < x, \\ 0. & \text{falls } x < t \leqslant b, \end{cases}
$$

erhält man für $a \leqslant x < (a + b)/2$ das eindeutig bestimmte Proximum $\bar{s} = 0$

und für $(a+b)/2 < x \leq b$ das eindeutig bestimmte Proximum $\bar{\alpha} = 1$; im Falle $x = (a+b)/2$ sind genau die $\bar{\alpha}$ mit $0 \leq \bar{\alpha} \leq 1$ Proxima. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b |\bar{B}_1(t-x) - B_1(t-x) - \bar{\alpha}|\, dt &= x - a, && \text{falls } a \leq x \leq (a+b)/2, \\ &= b - x, && \text{falls } (a+b)/2 \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Sei nun $r > 1$. (Unter Beachtung gewisser Modifikationen läßt sich auch der Fall $r = 1$ hier einordnen.) Es bezeichne

$$\xi_k = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{r+1}\right) \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

die Nullstellen des $r$ten Tschebyscheff-Polynoms 2. Art U_r nach linearer Transformation ins Intervall $[a, b]$. Man beachte, daß für $\sigma_r(t) := \operatorname{sign} U_r((2/(b-a))(t-(b+a)/2))$, $t \in [a, b]$, die Orthogonalitätsrelation

$$\int_a^b p(t)\, \sigma_r(t)\, dt = 0 \qquad \text{für} \quad p \in P_{r-1} \tag{17}$$

gilt.

Satz 2. *Das Interpolationspolynom $p \in P_{r-1}$ mit*

$$p(\xi_k) = \bar{B}_r(\xi_k - x) - B_r(\xi_k - x) \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

ist eindeutig bestimmtes L^1-Proximum zu $T_{-x}(\bar{B}_r - B_r)$ in $P_{r-1}(a, b)$.

Lemma 2. *Sei $x \in (\xi_1, \xi_r)$ und $\varphi(t) = (t-x)_+^{r-1}$ $(r \geq 2)$. Dann erfüllt $P_{r-1} \oplus \operatorname{span}\{\varphi\}$ auf jeder $(r+1)$-elementigen Menge $x_1 < \cdots < x_{r+1}$ mit $x_1 < x < x_{r+1}$ die Haarsche Bedingung.*

Man beweist Lemma 2 leicht durch vollständige Induktion mittels Anwendung des Satzes von Rolle.

Wir kommen zum Beweis von Satz 2. Zuerst untersuchen wir zwei einfache Spezialfälle. Sei $a \leq x \leq \xi_1$; dann gilt wegen

$$\begin{aligned} \bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x) &= r(t-x)^{r-1}, && \text{falls } a \leq t \leq x, \\ &= 0, && \text{falls } x < t \leq b, \end{aligned} \tag{18}$$

die Relation

$$\int_a^b |\bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x)|\, dt = \left| \int_a^b (\bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x))\, \sigma_r(t)\, dt \right|,$$

d.h. $p = 0$ ist L^1-Proximum. Analog gilt im Falle $\xi_r < x \leqslant b$

$$\int_a^b \left| \bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x) - r(t-x)^{r-1} \right| dt$$
$$= \left| \int_a^b (\bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x))\, \sigma_r(t)\, dt \right|,$$

d.h. $p(t) = r(t-x)^{r-1}$ ist L^1-Proximum. Im eigentlich interessanten Fall $\xi_1 < x < \xi_r$ beweisen wir die Behauptung mit Hilfe von Lemma 2: danach kann die Fehlerfunktion $T_{-x}(\bar{B}_r - B_r) - p$ nur an den Stellen $\xi_1, \ldots, \xi_r$ verschwinden. Darüber hinaus hat die Fehlerfunktion an diesen Stellen Vorzeichenwechsel; wäre nämlich in einer Umgebung eines dieser ξ_j etwa $\bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x) - p(t) \geqslant 0$, so erhielte man mit $q \in P_{r-1}$, $q(\xi_j) = 1$ und $q(\xi_k) = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant r \wedge k \neq j)$, und hinreichend kleinem $\lambda > 0$ eine Funktion $T_{-x}(\bar{B}_r - B_r) - p - \lambda q$, die im Widerspruch zu Lemma 2 mindestens $r + 1$ Nullstellen hätte. Somit gilt

$$\int_a^b \left| \bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x) - p(t) \right| dt = \left| \int_a^b (\bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x))\, \sigma_r(t)\, dt \right|,$$

d.h. p ist das gesuchte L^1-Proximum.

Wir berechnen nun den L^1-Approximationsfehler. Es ist

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (\bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x))\, \sigma_r(t)\, dt \\
&\quad = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} (\bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x))\, dt \\
&\quad = \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^{r-k}}{(r+1)} [\bar{B}_{r+1}(t-x) - B_{r+1}(t-x)]_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k ((x-\xi_{k+1})_+^r - (x-\xi_k)_+^r) \\
&\quad = (-1)^r (x-b)_+^r - (x-a)_+^r + 2 \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} (x-\xi_k)_+^r .
\end{aligned}$$

Man erhält somit

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b (\bar{B}_r(t-x) - B_r(t-x))\, \sigma_r(t)\, dt \right| \\
&\quad = (x-a)^r + 2 \sum_{k=1}^{r} (-1)^k (x-\xi_k)_+^r \qquad (19) \\
&\quad = \left(\frac{b-a}{2}\right)^r \rho_r\left(\frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right) \qquad \text{für } x \in [a, b];
\end{aligned}$$

dabei bezeichnet ρ_r den durch

$$\rho_r(x) := (x+1)^r + 2\sum_{k=1}^{r} (-1)^k (x + \cos(k\pi/(r+1)))_+^r$$

definierten Spline. Nach Taylor gilt

$$\rho_r(x) = r!\,(-1)^r \int_{-1}^{x} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} \operatorname{sign} U_r(t)\, dt$$

$$= -r \int_{-1}^{x} (t-x)^{r-1} \operatorname{sign} U_r(t)\, dt = r \int_{x}^{1} (t-x)^{r-1} \operatorname{sign} U_r(t)\, dt.$$

Mittels dieser Darstellung können wir folgende Eigenschaften von ρ_r nachweisen:

SATZ 3. (i) $\rho_r(-x) = \rho_r(x)$;

(ii) $\rho_r(-1) = \rho_r(1) = 0$;

(iii) $\rho_r(x) > 0$ *für* $|x| < 1$;

(iv) ρ_r *ist isoton auf* $[-1, 0]$ *und antiton auf* $[0, 1]$.

(i) Wegen $\operatorname{sign} U_r(-t) = (-1)^r \operatorname{sign} U_r(t)$ und (17) gilt nämlich

$$\rho_r(-x) = r\int_{-x}^{1} (t+x)^{r-1} \operatorname{sign} U_r(t)\, dt = r(-1)^r \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} \operatorname{sign} U_r(t)\, dt$$

$$= -r \int_{-1}^{x} (t-x)^{r-1} \operatorname{sign} U_r(t)\, dt = r\int_{x}^{1} (t-x)^{r-1} \operatorname{sign} U_r(t)\, dt$$

$$= \rho_r(x).$$

(ii) Offensichtlich gilt $\rho_r(-1) = 0$, wegen (i) also auch $\rho_r(1) = 0$.

(iii) Im Sinne der Definition der Nullstellenvielfachheit bei Splines (vgl. [2]) hat ρ_r an den Stellen $+1$ und -1 je eine r-fache Nullstelle; da $2r$ die Maximalzahl von Nullstellen ist, gilt $\rho_r(x) > 0$ für $|x| < 1$.

(iv) Im Falle $r = 1$ gilt $\rho_1(x) = 1 - |x|$ und damit die Behauptung. Für $r > 1$ untersuchen wir

$$\rho_r'(x) = r\left((x+1)^{r-1} + 2\sum_{k=1}^{r} (-1)^k \left(x + \cos\frac{k\pi}{r+1}\right)_+^{r-1}\right)$$

auf Nullstellen. Wegen (i) gilt $\rho_r'(0) = 0$. An den Stellen $+1$ und -1 hat ρ_r' außerdem je $(r-1)$-fache Nullstellen. Da ρ_r' maximal $2r - 1$ Nullstellen haben kann, gilt $\rho_r'(x) > 0$ für $-1 < x < 0$ und $\rho_r'(x) < 0$ für $0 < x < 1$ und damit die Behauptung.

ρ_r nimmt sein absolutes Maximum genau im Punkte 0 an. Für den Maximalwert $\bar{\rho}_r$ gilt

$$\bar{\rho}_r = r \int_0^1 t^{r-1} \operatorname{sign} U_r(t)\, dt. \tag{20}$$

Wegen

$$U_r(\cos x) = \frac{\sin((r+1)\,x)}{\sin x} \qquad \text{für} \quad 0 < x < \pi$$

und

$$\operatorname{sign}(\sin(r+1)\,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)(r+1)\,x)}{2k+1}$$

erhalten wir aus (20)

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_r &= r \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^{r-1} x \operatorname{sign}(\sin(r+1)\,x)\, dx \\ &= r\,\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^{r-1} x \sin((2k+1)(r+1)\,x)\, dx \\ &= (r+1)\,\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^r x \cos((2k+1)(r+1)\,x)\, dx; \end{aligned}$$

schließlich folgt mit

$$\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha x \cos \beta x\, dx = \frac{\pi \Gamma(\alpha+1)}{2^{\alpha+1} \Gamma(((\alpha+\beta)/2)+1)\, \Gamma(((\alpha-\beta)/2)+1)}$$
$$(-1 < \alpha < \beta)$$

(vgl. [9, p. 134, ex. 7])

$$\bar{\rho}_r = (r+1)!\,\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{\prod_{l=0}^{r} (2k(r+1)+(2l+1))} \sim \frac{1}{2^{r-1}} \cdot \left(\frac{r+1}{\pi}\right)^{1/2}. \tag{21}$$

4. Die optimalen Gewichte

Bezeichnen wir mit $\xi_{\nu\rho}$ ($\nu = 0,\dots, n-1;\ \rho = 1,\dots, r$) die Punkte

$$\xi_{\nu\rho} = \frac{x_{\nu+1}+x_\nu}{2} - \frac{x_{\nu+1}-x_\nu}{2} \cos\left(\frac{\rho\pi}{r+1}\right), \tag{22}$$

so gilt aufgrund der Überlegungen in den Abschnitten 2 und 3 (insbesondere Satz 2) für optimale α_{kj} $(0 \leqslant k < n, 0 \leqslant j < r)$ und α

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{kj} h_{r-j}(\xi_{\nu\rho} - x_k) + \alpha = h_r(\xi_{\nu\rho} - x) \qquad (0 \leqslant \nu < n, 1 \leqslant \rho \leqslant r). \tag{23}$$

Mit (6) und (23) erhalten wir ein System von $nr + 1$ linearen Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten. Dieses ist lösbar, da unser L^1-Approximationsproblem eine Lösung besitzt; zum Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit seien β_{kj} $(0 \leqslant k < n,\ 0 \leqslant j < r)$ und β eine Lösung des homogenen Systems, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k0} = 0 \tag{24}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{kj} h_{r-j}(\xi_{\nu\rho} - x_k) + \beta = 0 \qquad (0 \leqslant \nu < n, 1 \leqslant \rho \leqslant r). \tag{25}$$

Aus Interpolationsgründen ist dann

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{kj} h_{r-j}(t - x_k) + \beta = 0 \qquad \text{für fast alle } t \in \mathbb{R};$$

die Fourierreihe dieser Funktion ergibt $\beta = 0$ und

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{e^{-ilx_k}}{(il)^{r-j}} \beta_{kj} = 0 \qquad \text{für} \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{26}$$

Betrachtet man (26) für $l = 1, 2, \ldots, n \cdot r$, so erhält man ein Gleichungssystem mit nichtverschwindender Koeffizientendeterminante; also gilt auch $\beta_{kj} = 0$ $(0 \leqslant k < n, 0 \leqslant j < r)$. Folglich sind die optimalen Gewichte α_{kj} und α eindeutig bestimmt.

Mittels $u_{kj}(x) := \alpha_{kj}$ für $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir Funktionen u_{kj} $(0 \leqslant k < n, 0 \leqslant j < r)$. Mit Hilfe von (6) und (23) folgt dann, daß es sich dabei um periodische Polynomsplines der Ordnung r handelt mit einfachen Splineknoten in $\xi_{\nu\rho}$ $(0 \leqslant \nu < n, 1 \leqslant \rho \leqslant r)$; die u_{kj} genügen den Interpolationsbedingungen

$$u_{kj}^{(\rho)}(x_\nu) = \delta_{k\nu} \delta_{j\rho} \qquad (0 \leqslant \nu < n, 0 \leqslant \rho < r). \tag{27}$$

Dadurch sind sie andererseits aber auch schon eindeutig festgestlegt. Weiter folgt aus (6) und (23) die Beziehung

$$\operatorname{span}\{u_{kj} \mid 0 \leqslant k < n \wedge 0 \leqslant j < r\}$$
$$= \left\{\gamma + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{r} \gamma_{kj} T_{-\xi_{kj}} h_r \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{r} \gamma_{kj} = 0\right\}, \tag{28}$$

auf die wir im nächsten Abschnitt zurückkommen werden.

Bemerkung. Zu $x \in \mathbb{R}$ sind die optimalen Gewichte eindeutig bestimmt, außer bei $r = 1$ für $x = (x_k + x_{k+1})/2 \bmod 2\pi$ $(k = 0,\ldots, n-1)$; dann denken wir uns die u_{kj} an diesen Stellen stets durch die Normierungsbedingung $u_{kj}(x) = (u_{kj}(x+0) + u_{kj}(x-0))/2$ eindeutig festgelegt.

Zusammenfassend gilt

SATZ 4. *Zu festen Stützstellen* $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_0 + 2\pi$ *existiert ein Unterraum* $U_{r,n} := \operatorname{span}\{u_{kj} \mid 0 \leqslant k < n \wedge 0 \leqslant j < r\}$, *so daß für alle* $x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{f \in F_r} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} f^{(j)}(x_k)\, u_{kj}(x) \right|$$

genau für die Gewichte $u_{kj}(x)$ $(0 \leqslant k < n, 0 \leqslant j < r)$ *minimal wird. Die Basiselemente* u_{kj} *von* $U_{r,n}$ *sind periodische Polynomsplines der Ordnung r mit den in* (22) *angegebenen einfachen Splineknoten; sie genügen den Interpolationsbedingungen* (27) *und sind dadurch eindeutig bestimmt.*

Auf $C_{2\pi}^{r-1}$ kann man mittels

$$L_{r,n} f := \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} f^{(j)}(x_k)\, u_{kj}$$

einen Interpolationsoperator $L_{r,n} : C_{2\pi}^{r-1} \to U_{r,n}$ definieren. Mit (19), Satz 3 und Satz 4 ergibt sich dann folgendes

KOROLLAR. *$L_{r,n}$ hat bezüglich der Favardklasse F_r den Approximationsgrad*

$$\sup_{f \in F_r} \| f - L_{r,n} f \| = \frac{\bar{\rho}_r}{r!} \max_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right)^r;$$

dieser ist genau dann minimal, wenn die Stützstellen äquidistant sind.

5. Zur numerischen Bestimmung des Interpolationssplines

Ähnlich wie Golomb [1] beschreiben wir nun für den Fall äquidistanter Stützstellen eine Methode zur Bestimmung von $s \in U_{r,n}$ mit

$$s^{(\rho)}(x_\nu) = \eta_{\nu\rho} \qquad (0 \leqslant \nu < n,\ 0 \leqslant \rho < r). \tag{29}$$

Es bezeichne

$$\xi_j = (\pi/n)(1 - \cos(j\pi/(r+1))) \qquad (j = 1,\dots, r).$$

Gemäß (28) machen wir den Ansatz

$$s(t) = \gamma + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{r} \gamma_{kj} h_r(t - x_k - \xi_j); \tag{30}$$

die Koeffizienten γ und γ_{kj} $(0 \leqslant k < n,\ 1 \leqslant j \leqslant r)$ sind so zu bestimmen, daß

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{r} \gamma_{kj} = 0 \tag{31}$$

und (29) gilt. Zu (29) äquivalent ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\gamma + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{r} h_r(x_{\nu-k} - \xi_j)\, \gamma_{kj} = \eta_{\nu 0} \qquad (0 \leqslant \nu < n), \\ &\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{r} (-1)^\rho\, h_{r-\rho}(x_{\nu-k} - \xi_j)\, \gamma_{kj} = \eta_{\nu\rho} \qquad (0 \leqslant \nu < n,\ 1 \leqslant \rho < r); \end{aligned} \tag{32}$$

die Gleichungen (31) und (32) sind eindeutig lösbar. Bezeichnen wir mit $C_{\rho j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix

$$C_{\rho j} := (-1)^\rho \begin{pmatrix} h_{r-\rho}(x_0 - \xi_j) & h_{r-\rho}(x_{-1} - \xi_j) & \cdots & h_{r-\rho}(x_{-n+1} - \xi_j) \\ h_{r-\rho}(x_{-n+1} - \xi_j) & h_{r-\rho}(x_0 - \xi_j) & \cdots & h_{r-\rho}(x_{-n+2} - \xi_j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{r-\rho}(x_{-1} - \xi_j) & h_{r-\rho}(x_{-2} - \xi_j) & \cdots & h_{r-\rho}(x_0 - \xi_j) \end{pmatrix}$$

und mit $g_j \in \mathbb{R}^n$ bzw. $y_\rho \in \mathbb{R}^n$ die Vektoren

$$g_j = \begin{pmatrix} \gamma_{0j} \\ \vdots \\ \gamma_{n-1,j} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad y_\rho = \begin{pmatrix} \eta_{0\rho} \\ \vdots \\ \eta_{n-1,\rho} \end{pmatrix},$$

so erhalten wir aus (32)

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{r} C_{0j}\, g_j = y_0 ,$$
$$\sum_{j=1}^{r} C_{\rho j}\, g_j = y_\rho \qquad (\rho = 1,\ldots, r-1). \tag{33}$$

$C_{\rho j}$ ist zyklische (n, n)-Matrix; die mittels der $n$ten Einheitswurzel $\omega =$ $\exp(2\pi i/n)$ gebildete Matrix

$$\Omega = (\omega^{kj})_{0 \leqslant k,j < n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

enthält als Spalten die Eigenvektoren von $C_{\rho j}$ zu deren Eigenwerten

$$\lambda_\nu^{(\rho,j)} := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^\rho\, h_{r-\rho}(x_{-k} - \xi_j)\, \omega^{\nu k} \qquad (\nu = 0,\ldots, n-1). \tag{34}$$

Mit $\Omega^{-1} = (1/n)\, \Omega^*$ folgt

$$(1/n)\, \Omega^* C_{\rho j} \Omega = D_{\rho j} := \operatorname{diag}(\lambda_0^{(\rho,j)},\ldots, \lambda_{n-1}^{(\rho,j)}).$$

Setzen wir

$$\tilde{g}_j := (1/n)\, \Omega^* g_j \qquad (j = 1,\ldots, r)$$

und

$$\tilde{y}_\rho := (1/n)\, \Omega^* y_\rho \qquad (\rho = 0,\ldots, r-1), \tag{35}$$

so läßt sich (33) umformen in

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{r} D_{0j}\, \tilde{g}_j = \tilde{y}_0 , \tag{36}$$
$$\sum_{j=1}^{r} D_{\rho j}\, \tilde{g}_j = \tilde{y}_\rho \qquad (\rho = 1,\ldots, r-1).$$

Umordnen der Gleichungen des Systems ergibt mit

$$\Lambda_\nu := \begin{pmatrix} \lambda_\nu^{(0,1)} & \cdots & \lambda_\nu^{(0,r)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_\nu^{(r-1,1)} & \cdots & \lambda_\nu^{(r-1,r)} \end{pmatrix} \qquad (\nu = 0,\ldots, n-1)$$

die zu (36) äquivalenten Gleichungen

$$A_0 \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{01} \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_{0r} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{00} \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_{0,r-1} \end{pmatrix} \tag{37}$$

und

$$A_\nu \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{\nu 1} \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_{\nu r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{\nu 0} \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_{\nu, r-1} \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1,..., n-1); \tag{38}$$

zusammen mit der aus (31) hervorgehenden Gleichung

$$\sum_{\rho=1}^{r} \tilde{\gamma}_{0\rho} = 0 \tag{39}$$

sind diese eindeutig lösbar. Bildet man dann mit Hilfe der Lösung der Gleichungen (37), (38) und (39) die Matrix $\tilde{G} := (\tilde{\gamma}_{\nu\rho})$, so liefern die Elemente der Matrix $\Omega\tilde{G}$ gerade die Koeffizienten γ_{kj} $(0 \leqslant k < n, 1 \leqslant j \leqslant r)$.

Anmerkung. Die inneren Produkte in (34), (35) und bei $\Omega\tilde{G}$ können nach Cooley und Tukey (vgl. [6, pp. 66–71]) mittels diskreter Fouriertransformation effizient berechnet werden. Die Matrix $\tilde{G}$ erhält man durch Lösen von n Gleichungssystemen mit je r bzw. $r + 1$ Unbekannten. Der Gesamtaufwand beträgt also $O(r^2 n lg(n) + nr^3)$.

REFERENCES

1. M. GOLOMB, Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes, *J. Approximation Theory* **1** (1968), 26–65.
2. R. S. JOHNSON, On monosplines of least deviation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **96** (1960), 458–477.
3. N. E. LUSHPAI, Best quadrature formulas on classes of differentiable periodic functions (Russian), *Mat. Zametki* **6** (1969), 475–481.
4. A. SARD, Best approximate integration formulae; best approximation formulae, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 80–91.
5. A. SCHÖNHAGE, "Approximationstheorie," de Gruyter, Berlin/New York, 1971.
6. J. STOER, "Einführung in die Numerische Mathematik," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.
7. V. M. TIHOMIROV, Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations, *Russian Math. Surveys* **15**, No. 2 (1960), 75–111.
8. V. M. TIHOMIROV, Best methods of approximation and interpolation of differentiable functions in the space $C[-1, 1]$, *Math. USSR Sb.* **9** (1969), 275–289.
9. E. C. TITCHMARSH, "The Theory of Functions," Oxford University Press, London, 1939.